

AI时代背景下线性代数课程教学 的几点思考

张小向



东南大学数学学院

AI时代背景

➤ 教学资源丰富

纸质教材(含教辅)、数字资源(文本/图片/动画/视频)

➤ 在线平台众多

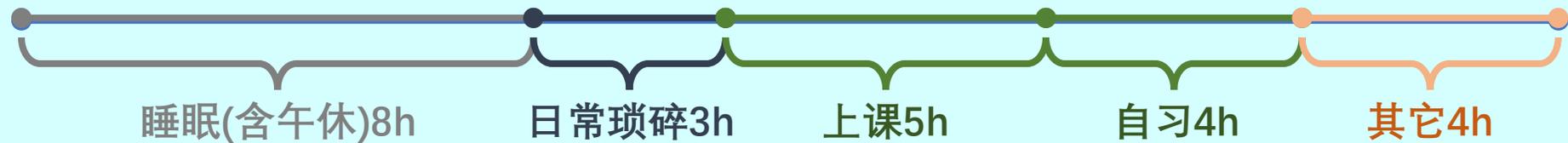
中国大学MOOC、国家高等教育智慧教育平台、学堂在线、超星、智慧树、网易、B站、抖音、……

➤ 技术发展迅速

互联网、大模型、APP、小程序、软件、硬件、……

一. 如何增效减负

➤ 学生(工作日)一天的时间



➤ 给学生的建议

1. 衔接过渡
2. 课前预习
3. 课后练习
4. 课堂效率
5. 退-比-串

讲座报告
社团活动
学生工作
运动健身
休闲娱乐
亲友交流
.....

1. 从中学到大学的衔接与过渡

(1) 线性代数先修课

第一章 基本概念	第二章 几何背景	第三章 证明方法	第四章 拓展提升	第五章 应用案例
1、线性方程组	6、向量	9、数学归纳法	12、连加号	18、邻接矩阵
2、初等变换法	7、化平面二次曲线的一般方程为标准方程	10、充分必要条件	13、从倒数到逆序数	19、用积分和奖券兑换商品
3、矩阵及其线性运算	8、观察二次曲线与二次曲面	11、反证法	14、初等矩阵	20、线性递推数列
4、矩阵的乘法			15、排列的逆序数与奇偶性	
5、行列式与克拉默法则			16、多项式的根	

1. 从中学到大学的衔接与过渡

(2) 从“知识-能力-素养”的角度谈大学阶段数学课程的学习

知识类型 举例		事实		原理		方法	
		现象,实例,定义,公理,性质, 定理,推论,.....		举例说明,语言解释,模拟 演示,逻辑推理,.....		建模,计算,编程,构造,分 类,归纳,演绎,反证,.....	
学习 方法与目标	基本	记忆 背诵书上写的/老师说的		理解 领会书上写的/老师说的		练习 完成作业/刷题	
	高级	学思 是/为什么?我怎么没想到?		钻研 真是/只能是这样的吗?		领悟 从练习中得到了什么收获?	
学习 行为	基本	能复述 准确无误/用自己的语言转述		知因果 条件与结论间的逻辑关系		善应用 分析问题并联想相关知识	
	高级	能提问 提出自己的视角/观点/问题		深剖析 分析关键因素/深层原因		有创新 提出不同的/更好的方法	
成效 体现	基本	能复述 准确无误/用自己的语言转述		知因果 条件与结论间的逻辑关系		善应用 分析问题并联想相关知识	
	高级	能提问 提出自己的视角/观点/问题		深剖析 分析关键因素/深层原因		有创新 提出不同的/更好的方法	

1. 从中学到大学的衔接与过渡

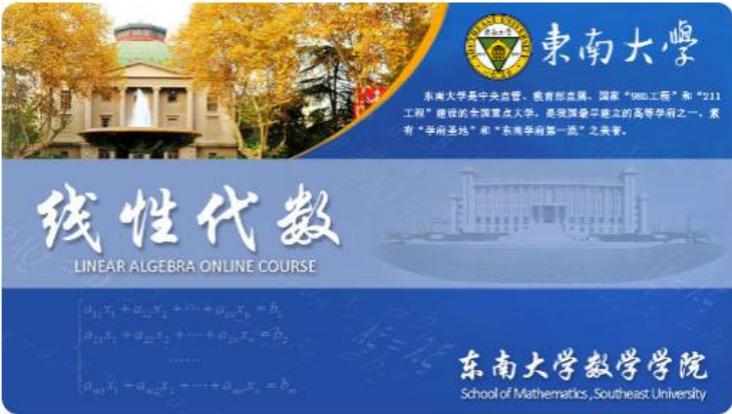
(2) 从“知识-能力-素养”的角度谈大学阶段数学课程的学习

能力类型 学习 方法与目标		科学计算 笔算/机算 数值/符号	抽象思维 提炼共性/定义概念 发现规律/概括总结	逻辑推理 分析,综合,归纳 演绎,反证,转化	应用创新 理论/实践 类比,推广,逆向,猜想	
学习 行为	基本	动手 代入公式/按部就班	对照 对照数形/实例	积累 积累常见的范式	模仿 模仿/重复已有方法	
	高级	精进 分析/改进算法	摆脱 摆脱数形/实例	自主 自主进行推理	自创 自创不同的方法	
成效 体现	基本	正确 得到正确的结果	适应 抽象的数学语言	看懂 复杂的逻辑结构	应用 对号入座/照猫画虎	
	高级	优化 算法更快/精度更高	驾驭 抽象的数学语言	自建 高效的逻辑结构	创新 改进/突破/颠覆	
素养	科学精神		专业素质		价值追求	情感态度
内涵	严谨,实证,怀疑,批判		数学意识/直觉		数学评价/审美	认同,笃信
体现	事实求是,探索创新		从数学角度分析问题		知是非/可否/优劣/取舍	热爱,执着

2. 课前预习

(1) 慕课

首页 > 国家精品 / 理学



智慧课程 认证学习 国家精品

线性代数

第17次开课 ▾

开课时间: 2025年09月08日 ~ 2026年01月11日

学时安排: 2-4小时每周

进行至第7周, 共18周

已有 767 人参加

[已参加, 进入学习](#)

注:当前学期存在已过期的测验, 过期部分将无法计入学期总成绩。

智慧课程 利用人工智能技术, 为你提供高效、个性化的学习服务

[课程知识图谱](#) [AI助教智能问答](#) [AI辅助课程学习提效](#) [个性化学习](#) [认证成绩和证书](#)

课程详情 课程图谱 课程评价(586)

线性代数是高等学校理、工、经管等多个专业的公共基础课, 为现代社会各领域提供必备的数学工具。本课程注重由浅入深, 化难为易, 用尽可能少的时间让学生理解并掌握线性代数中的基本概念、理论和方法, 为后继课程提供必要的基础知识, 并达到教育部大学数学课程教学指导委员会和研究生入学考试的要求。

—— 课程团队



东南大学

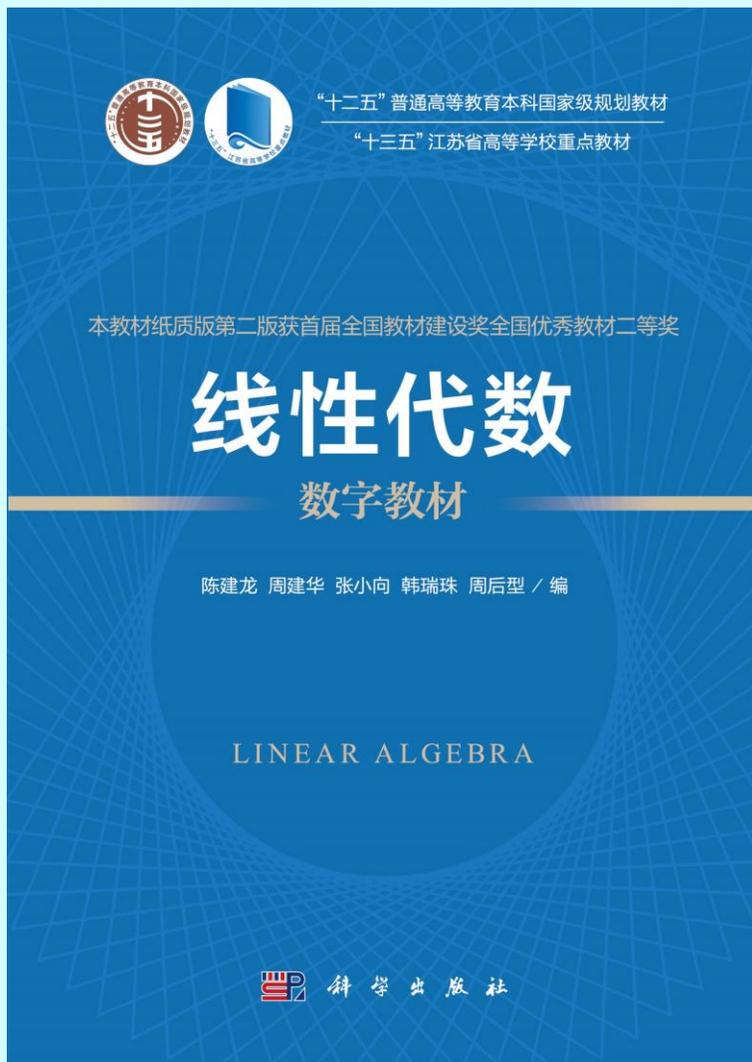
3 位授课老师



陈建龙
教授

2. 课前预习

(2) 数字教材



2. 课前预习

(2) 数字教材



The screenshot shows a digital textbook page for 'Linear Algebra (Digital Textbook)' on the Science Press website. The page features a blue cover image of the textbook on the left, with the title '线性代数' and '数字教材' visible. To the right of the cover, the title '线性代数 (数字教材)' is displayed in a larger font, followed by a '收藏' (Collect) button. Below the title, the author '作者: 邓建旭, 周建华, 张小向, 樊晓峰, 周后星' is listed, along with the ISBN 'ISBN: 978-7-89509-208-6', the publisher '出版社: 科学出版社', and the publication date '出版日期: 2024-11-20'. The price '¥49.00' is prominently displayed in orange, with a '阅读' (Read) button below it. At the bottom of the page, there are tabs for '简介' (Introduction) and '目录' (Table of Contents), with '简介' currently selected.

数字教材 科学出版社

首页 教材 书单 书架 客户端下载 搜索 通知 个人中心

当前位置: 首页 > 教材 > 教材详情

线性代数 (数字教材) 收藏

作者: 邓建旭, 周建华, 张小向, 樊晓峰, 周后星
ISBN: 978-7-89509-208-6
出版社: 科学出版社
出版日期: 2024-11-20

¥49.00

阅读

简介 目录

2. 课前预习

(2) 数字教材

线性代数 (数字教材)

目录 资源

扉页

前言

《线性代数》的学习

数字教材使用方法

第1章 矩阵

- 1.1 矩阵的基本概念
 - 1.1.1 矩阵的概念
 - 1.1.2 几种特殊...
- 1.2 矩阵的基本运算

1.1 矩阵的基本概念

1.1.1 矩阵的概念

在现实生活中,人们往往不仅需要使用单个的数,而且还要处理成批的数.这就需要把数的概念推广到矩阵.

矩阵的定义及例子

	甲	乙	丙	丁
A	120	150	180	210
B	150	180	210	240
C	180	210	240	270
D	210	240	270	300

	甲	乙
B	15%	20%
C	18%	24%
D	21%	27%

	甲	乙
B	20	30
C	30	40
D	40	50

	A	B	C	D
E	1200	1500	1800	2100
F	1500	1800	2100	2400
G	1800	2100	2400	2700
H	2100	2400	2700	3000

张小舟

清华大学

清华大学数学学院

页码: 2/83 返回前一页 当前资源: 资源 03 前往 1

合计字数: 37619字

2. 课前预习

(2) 数字教材



数字教材 科学出版社

首页 教材 书架

客户端下载

线性代数 (数字教材)

作者: 陈建龙, 周建华, 张小向, 韩雄, 周广, 张中兴, 梁清

出版社: 科学出版社

出版日期: 2024-11-28

¥49.00

购买 加入书架 试读 取消收藏

扫码阅读

简介 目录

本书为线性代数数字教材, 所依托的纸质教材是“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材, 也是“十三五”江苏省高等学校重点教材与江苏“十四五”普通高等教育本科省级规划教材, 纸质教材第二版还获首届全国教材建设奖全国优秀教材二等奖; 本教材依托的课程获奖多项, 包括首批国家级线上一流课程、首批国家级线上线下混合式一流课程、国家级精品在线开放课程等。本数字教材资源丰富, 包括视频、动画、互动自测题、注释、知识拓展、程序等多模态资源, 在编写过程中力求内容的科学性与系统性, 注重代数概念的几何背景以及实际应用背景的介绍, 提供一整套线性代数学习的解决方案, 便于读者更好地理解和掌握线性代数理论, 提高运用线性代数方法解决实际问题。本教材主要内容包括矩阵、行列式、 n 维向

您好! 我是科学出版社数字教材平台的AI伴学助手小科

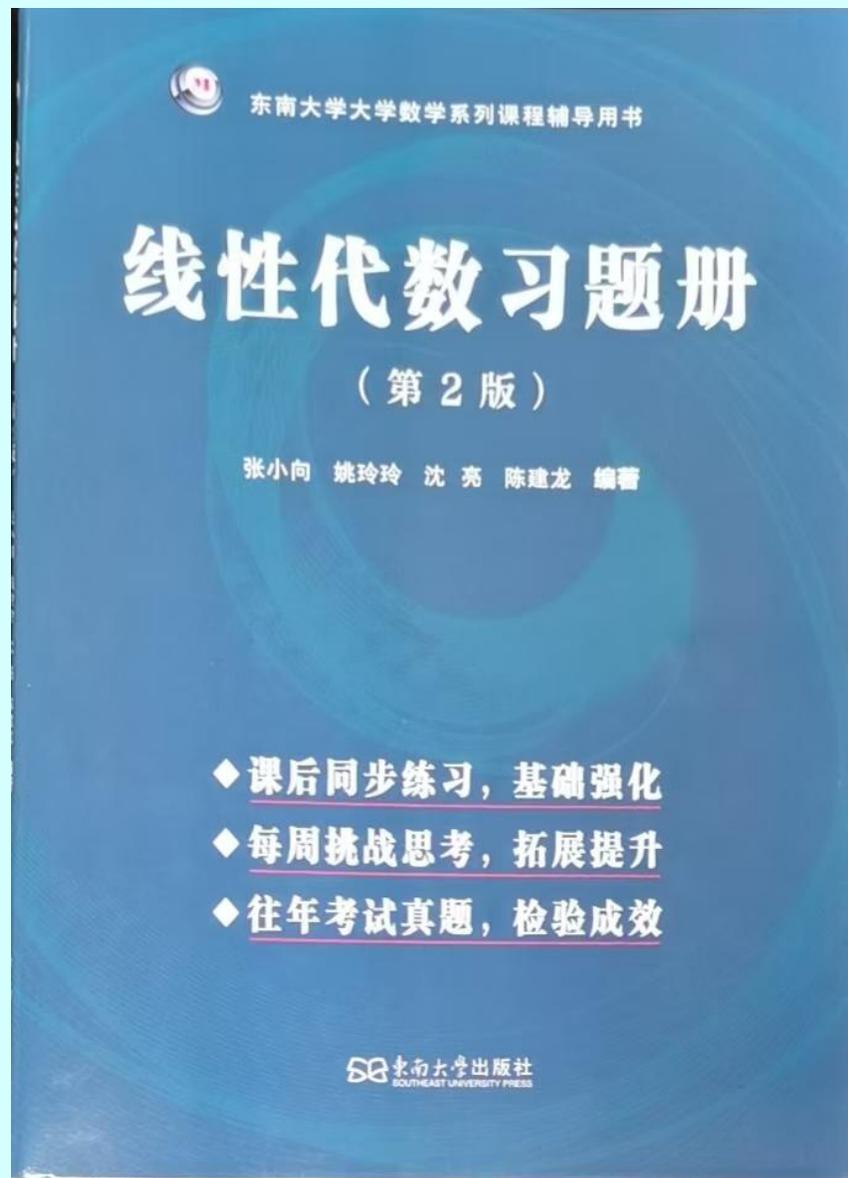
3. 课后练习

(1) 慕课测验

(2) 纸质教材习题

(3) 数字教材自测题

(4) 线性代数习题册



3. 课后练习

(1) 慕课测验

(2) 纸质教材习题

(3) 数字教材自测题

(4) 线性代数习题册

线性代数习题册(第2版)

9. 计算行列式
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$$

一、主要知识点
矩阵的转置、对称矩阵、
阵、行最简形矩阵、矩阵等价

二、课后练习

1. 已知矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

2. 已知矩阵 A, B, P, Q

若 $O = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, 求 $\begin{bmatrix} P \\ C \end{bmatrix}$

三、思考题

已知 $E-AB$ 可逆, 其中 A, B 为 n 阶方阵, E 为单位矩阵, 问 $E-BA$ 是否一定可逆? 如果 $E-BA$ 可逆, $(E-BA)^{-1}$ 与 $(E-AB)^{-1}$ 有何联系?

10. 判断题.

(1) 初等矩阵都可逆.

(2) 初等矩阵的逆矩阵

(3) 设 A 与 B 都是 n 阶

(4) 设 $AB=AC$, 其中

(6) 设 A 与 B 都是 n 阶可逆矩阵, 则 $A+B$ 也是 n 阶可逆矩阵. ()

(7) 设 A 与 B 都是 n 阶可逆矩阵, 并且 $AB=BA$, 则 $A^{-1}B^{-1}=B^{-1}A^{-1}$. ()

(8) 设 A 与 B 都是 n 阶方阵, 则 $|A+B|=|A|+|B|$. ()

(9) 设 A 为 n 阶方阵, P 为 n 阶初等矩阵, 则 $|AP|=|A||P|=|P||A|=|PA|$. ()

(10) 设 n 阶方阵 A 与 B 等价, 则 $|A|=0$ 当且仅当 $|B|=0$. ()

- 4. 课堂效率
- 5. 退-比-串

把一个矩阵表示为 矩阵单位的线性组合

张小向



东南大学数学学院

4. 课堂效率

5. 退-比-串

$AB = BA?$		
AB 有意义, 但 BA 无意义.	$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$	妻子的妈妈 妈妈的妻子
AB 与 BA 都有意义, 但不同型.	$(1, 2) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$	爸爸的妈妈 妈妈的爸爸
AB 与 BA 都有意义, 且同型, 但不相等.	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$	爸爸的哥哥 哥哥的爸爸
AB 与 BA 都有意义, 且相等.	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$	爸爸的爷爷 爷爷的爸爸

4. 课堂效率

5. 退-比-串

珍惜结合律		
$(AB)C = A(BC)$	已知 $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} (1, -1)$, 求 A^{100} .	人老实话不多
		身高一米七九年收入二十万

慎用消去律	
$A \neq O, AB = AC \Rightarrow B = C?$	掉到地上 = 掉到地下 \Rightarrow 上 = 下?
A 列满秩, $AB = AC \Rightarrow B = C$.	这个人就是娘 = 这个人就是妈 \Rightarrow 娘 = 妈

珍惜等量代换	
$B = C \Rightarrow AB = AC$	娘 = 妈 \Rightarrow 姑娘 = 姑妈?
	娘 = 妈 \Rightarrow 新娘 = 新妈?

- 4. 课堂效率
- 5. 退-比-串

笑一笑 · 悟一道

张小向



东南大学数学学院

4. 课堂效率

5. 退-比-串

视频1. 行列式的性质串讲

视频2. 初等变换的十个应用

视频3. 可逆矩阵的二十个等价刻画

视频4. 矩阵等价与向量组等价

视频5. 分块初等矩阵与分块初等变换

视频6. 分块矩阵与向量组

视频7. 分块矩阵的应用-降阶与归纳

视频8. 求矩阵的特征多项式与特征值

视频9. 变与不变的对立统一在数学课程中的体现

二. 如何强基赋能

- 可视的线性代数
- 有用的线性代数
- 进阶的线性代数
- 好玩的线性代数

二. 如何强基赋能

➤ 可视的线性代数

- (1) 两张图片的线性组合
- (2) 给图片加特效
- (3) 神奇的置换矩阵
- (4) 平面直角坐标变换
- (5) 行列式的几何意义
- (6) 三个平面的位置关系
- (7) 两条直线的位置关系
- (8) 奇异值分解与图像压缩
- (9) 观察二次曲线与二次曲面

.....



二. 如何强基赋能

- 可视的线性代数
- 有用的线性代数

平面图形的几何变换

随着计算机科学技术的发展, 计算机图形学的应用领域越来越广, 如仿真设计、效果图制作、动画片制作、电子游戏开发等。

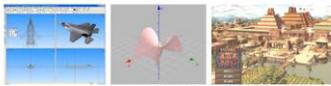


图1 计算机图形学的广泛应用

图形的几何变换, 包括图形的平移、旋转、放缩等, 是计算机图形学中经常遇到的问题。这里暂时只讨论平面图形的几何变换。

【模型准备】平面图形的旋转和放缩都很容易用矩阵乘法实现, 但是图形的平移除了用坐标变换, 还需要用矩阵乘法实现, 这可以通过构造

太空探测器轨道数据问题

太空航天探测器发射以后, 可能需要调整以使探测器处在精确计算的轨道里。雷达监测到一组列向量 x_0, \dots, x_n , 它们给出了不同时刻探测器的实际位置与预定轨道之间的偏差的信息。

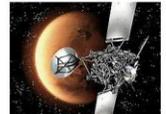


图1 火星探测器

【模型准备】在太空中进行数据拟合时需要计算由数据

网页等级

互联网是人们交流和获取信息的重要渠道, 人们常常通过搜索关键词查到所需的信息。然而包含某个特定关键词的页面往往是数以万计的, 例如, 包含“线性代数”的页面有几十万个, 我们不可能短时间内逐一阅读这些页面, 因此需要一种方法将这些页面按等级排列, 使得重要的页面排在前面位置。为了解决这一问题, Lawrence Page, Sergey Brin, Rajeev Motwani 和 Terry Winograd 在 1998 年提出了一种能够自动判断网页重要性的技术, 其关键就是网页等级 (PageRank) 的概念。



YASK 网页
Cougou

简单的种群增长问题

生物种群数量变化情况会影响生态平衡, 统计、监测某些生物种群数量并研究其变化规律和趋势对于维护生态平衡和保护环境都具有重要的意义。



图1 猫头鹰和森林鼠

【模型准备】经过统计, 某地区猫头鹰和森林鼠的数量具有如下规律: 如果设右森林鼠的食物, 每个且只有一只的猫头鹰可以存活, 如果只有猫头鹰作为捕

案例1 交通网络流量分析问题

案例2 配方问题

案例3 投入产出问题

案例4 平板的稳态温度分布问题

案例5 CT图像的代数重建问题

案例6 平衡结构的梁受力计算

案例7 化学方程式配平问题

案例8 互付工资问题

案例9 平衡价格问题

案例10 电路设计问题

案例11 平面图形的几何变换

案例12 太空探测器轨道数据问题

案例13 应用矩阵编制Hill密码

案例14 显示器色彩制式转换问题

案例15 网页等级

案例16 人员流动问题

案例17 金融公司支付基金的流动

案例18 简单的种群增长问题

案例19 一阶常系数线性齐次微分方程组的求解

案例20 最值问题

二. 如何强基赋能

- 可视的线性代数
- 有用的线性代数
- 进阶的线性代数

视频1. 矩阵的开方问题

视频2. 矩阵的分解:

(满秩/LU/SVD/QR/谱/Cholesky)

视频3. 那个引出一段佳话的六阶行列式

视频4. 关于行列式的华罗庚不等式

视频5. 矩阵秩的一个等价刻画

视频6. 关于逆矩阵的Jacobson引理

视频7. 关于逆矩阵的华罗庚等式

视频8. 行最简形的唯一性

视频9. 线性方程组的最小二乘解

视频10. n 阶复矩阵的中心化子

视频11. 相似的分块对角矩阵

视频12. Witt定理的推广

视频13. 市值250亿美元的特征向量

视频14. 正交化的唯一性

视频15. 实二次型的半正定性

二. 如何强基赋能

- 可视的线性代数
- 有用的线性代数
- 进阶的线性代数
- 好玩的线性代数

视频1. 微信群中的邻接矩阵

视频2. 用积分和奖券兑换商品

视频3. 洛书与幻方

视频4. 范德蒙德行列式的应用

视频5. 神奇的置换矩阵

视频6. 斐波那契数列与黄金分割

洛书与幻方

张小向



东南大学数学学院

三. 如何扬长补短

➤ 智慧教学手段之长

快、便捷、多媒体

➤ 智慧教学手段之短

AI幻觉、对学习者的要求(自律、判断力、克服依赖)



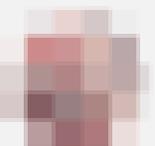
老师好 请问当阶梯型矩阵的非零行数大于未知量数的时候, 齐次线性方程组的解是什么情况呢

该用户通过“2024秋-工科高代”群向你发起临时会话

设 $m \times n$ 矩阵 A 经过初等行变换化为行阶梯形矩阵 U , 则 U 的非零行数 $r = r(U) = r(A) \leq n$, r 不可能 $> n$.



11:16



! 明白了 谢谢老师!

请问当阶梯型矩阵的非零行数大于未知量数的时候，齐次线性方程组的解是什么情况呢



当阶梯型矩阵的非零行数大于未知量数时，齐次线性方程组仅有零解。这是因为对于齐次线性方程组 $Ax = 0$ ，将系数矩阵 A 化为阶梯型矩阵后，非零行对应的方程实际上是对未知量的约束方程。若非零行数大于未知量个数，意味着约束方程过多，只能有 $x = 0$ 这一平凡解。

请问当阶梯型矩阵的非零行数大于未知量数的时候，齐次线性方程组的解是什么情况呢

当阶梯型矩阵的非零行数大于未知量数时，这意味着在齐次线性方程组中，有效方程（即非零行代表的方程）的数量超过了未知量的数量。这种情况下，我们可以分析方程组的解的情况如下：

1. 无解或唯一零解：

- 在大多数情况下，当非零行数（即有效方程数）大于未知量数时，方程组将是过定的（即方程数量多于未知量数量），这通常导致方程组无解。
- 但在齐次线性方程组中，由于所有方程右侧的常数项都是0，一个显然的解总是存在，即所有未知量都等于0（零解）。
- 因此，在这种情况下，齐次线性方程组的唯一解是零解。

2. 几何解释：

- 在几何上，每个方程可以看作是在 n 维空间中的一个超平面（对于 n 个未知量）。当方程数量多于未知量数量时，这些超平面可能不会有公共交点（除非它们恰好相交于原点），或者它们可能只在原点相交。
- 由于是齐次方程组，所有超平面都通过原点，因此它们至少在原点相交，即零解是方程组的解。

3. 代数解释：

- 在代数上，这可以通过矩阵的秩（rank）来理解。当阶梯型矩阵的非零行数（即秩）大于未知量数时，矩阵的列空间（由矩阵的列向量生成的空间）的维度小于未知量空间的维度。
- 这意味着，除了零向量外，没有其他向量能同时满足所有方程（即没有其他向量在矩阵的列空间中且同时也在由方程组定义的解空间中）。

综上所述，当阶梯型矩阵的非零行数大于未知量数时，齐次线性方程组的唯一解是零解。

请问当阶梯型矩阵的非零行数大于未知量数的时候，齐次线性方程组的解是什么情况呢

1. 首先回顾阶梯型矩阵与齐次线性方程组的关系

- 对于齐次线性方程组 $Ax = 0$ (其中 A 是系数矩阵, x 是未知数向量), 通过对系数矩阵 A 进行初等行变换可以化为阶梯型矩阵。
- 设齐次线性方程组 $Ax = 0$ 中未知数的个数为 n 。

2. 然后分析阶梯型矩阵的秩与解的关系

- 根据线性方程组的理论, 系数矩阵 A 的秩 $r(A)$ 等于其阶梯型矩阵的非零行数。
- 当 $r(A) = n$ 时, 齐次线性方程组 $Ax = 0$ 只有零解。这是因为此时方程组没有自由变量, 每一个未知数都可以由方程组唯一确定, 并且只能取 0 值才能满足方程组。
- 而当阶梯型矩阵的非零行数 $r(A) > n$ 这种情况是不可能出现的。因为矩阵的秩 $r(A)$ 是小于等于行数和列数中的最小值的。对于 $m \times n$ 的系数矩阵 A (m 是方程的个数, n 是未知数的个数), 有 $r(A) \leq \min\{m, n\}$ 。在齐次线性方程组中, 秩 $r(A)$ 最大就是 n (未知数的个数), 不会出现 $r(A) > n$ 的情况。

所以, 在正常情况下, 不会出现阶梯型矩阵的非零行数大于未知量数, 齐次线性方程组要么有非零解 (当 $r(A) < n$ 时), 要么只有零解 (当 $r(A) = n$ 时)。

AI助教

资料助手

AI学情分析

我是AI助教

我可以帮你解答学习疑惑，也会提供陪伴和支持🧡

学习答疑

课程资料智能问答，
高效获取课程知识



资源推荐

海量优质资源，一键送达



请问当阶梯型矩阵的非零行数大于未知量数的时候，齐次线性方程组的解是什么情况呢

抱歉，您说的我不太明白呢，或者您换个说法问我呢~

请问当阶梯型矩阵的非零行数大于未知量数的时候，齐次线性方程组的解是什么情况呢



在讨论线性代数中的齐次线性方程组时，我们通常使用矩阵来表示这些方程。阶梯型矩阵是一种特殊的矩阵形式，它可以帮助我们确定方程组的解的性质。

对于一个齐次线性方程组，其一般形式为 $Ax = 0$ ，其中 A 是系数矩阵， x 是未知量向量。如果系数矩阵 A 被化简为阶梯型矩阵，我们可以分析其解的情况：

1. **非零行数：**阶梯型矩阵中的非零行数代表了方程组中独立方程的数量。
2. **未知量数：**这是方程组中变量（未知数）的总数。
3. **解的情况：**
 - 如果非零行数等于未知量数，那么方程组有唯一解，即平凡解（所有未知量都为0）。
 - 如果非零行数小于未知量数，那么方程组有无穷多解，因为存在自由变量（即不被任何方程约束的变量）。
 - 如果非零行数大于未知量数，这在理论上是不可能的，因为这意味着方程组中的方程数多于未知数，这违反了齐次线性方程组的定义。在齐次线性方程组中，未知量数至少应该等于非零行数，以保证方程组是一致的。

因此，如果一个阶梯型矩阵的非零行数大于未知量数，这实际上意味着方程组是不一致的，没有解。这种情况在齐次线性方程组中是不会发生的，因为齐次线性方程组总是至少有一个解，即平凡解。如果出现了这种情况，可能是在化简过程中出现了错误，或者方程组本身存在问题。

新对话

请问当阶梯型矩阵的非零行数大于未知量数的时候，齐次线性方程组的解是什么情况呢？



当一个阶梯型矩阵的非零行数大于未知量数时，齐次线性方程组 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的解的情况如下：

- 非零行数大于未知量数：**这意味着方程组中的方程数量超过了未知数的数量，即 $m > n$ ，其中 m 是方程数， n 是未知量数。
- 齐次线性方程组：**齐次线性方程组总是有解，因为零向量 $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 必定是一个解。
- 解的情况：**
 - 唯一解：**如果阶梯型矩阵的非零行数等于未知量数（即满秩），则齐次线性方程组只有零解。
 - 无穷多解：**如果阶梯型矩阵的非零行数小于未知量数（即不满秩），则齐次线性方程组有非零解，且解空间是无穷维的。
- 非零行数大于未知量数的情况：**
 - 由于非零行数大于未知量数，矩阵的秩 r 最多为 n （未知量数）。因此， $r \leq n$ 。
 - 如果 $r = n$ ，则方程组只有零解。
 - 如果 $r < n$ ，则方程组有非零解。

结论：当阶梯型矩阵的非零行数大于未知量数时，齐次线性方程组的解可能是唯一的零解（当矩阵满秩时），或者有无穷多个非零解（当矩阵不满秩时）。具体取决于矩阵的秩与未知量数的关系。

备课案例:

《大数据与智能系统的数学基础——高等代数与解析几何》

向DeepSeek提问:

- (1) 请用不超过500字科普一下“大数据”，对象是理科大一刚入学的新生。
- (2) 请像刚才那样，继续科普一下“智能系统”(这应该是人工智能和系统科学交叉领域中的概念)。
- (3) 学习“大数据”与“智能系统”需要哪些数学基础？

➤ 大数据

简单说, **大数据**就是指**规模巨大**、**类型复杂**、**产生速度极快**,以至于用传统方法难以处理的数据集合。

它的核心特征通常用“**4V**”概括:

Volume(海量): 数据量极大,常以PB(1024TB)、EB为单位衡量。

Velocity(高速): 数据高速产生和流动,比如每秒无数的社交媒体发帖或传感器读数。

Variety(多样): 数据类型繁多,包括文本、图片、视频、地理位置等结构化或非结构化数据。

Value(价值): 数据本身价值密度低,犹如大海捞针,但通过分析能挖掘出巨大价值。

它有什么**用**?

大数据并非关于“数据有多大”,而在于如何处理它。我们通过分布式计算、机器学习等先进技术,从这些数据中揭示出隐藏的模式、趋势和关联。

例如:

推荐系统: 电商和视频平台通过分析你的海量行为数据,精准推荐商品和内容。

科学研究: 在天文学、基因组学等领域,处理巨量观测或测序数据,加速新发现。

所以,大数据本质是一场从数据中获取知识和智能的革命。

作为理科生,你们未来可能会用编程、统计和建模工具成为这场革命的推动者,让数据“开口说话”。

—— DeepSeek

➤ 智能系统

如果说“大数据”是原材料,那么“**智能系统**”就是利用这些材料进行感知、分析、决策并自主行动的“超级大脑”。

它是一个高度融合的跨学科领域,其**核心思想**是:将人工智能(AI)的算法模型,嵌入到复杂的现实“系统”中,通过感知环境、持续学习并动态调整,最终实现系统整体目标的优化。

你可以从三个层面理解它:

感知与认知(“五官”与“大脑”):系统能通过传感器、数据接口等“感官”(物联网技术),实时采集海量环境数据(即大数据)。然后利用机器学习、知识图谱等AI技术“理解”和分析这些信息。

决策与规划(“思考”):这是智能的核心。系统基于当前状态和历史数据,通过算法模型进行计算、推理和预测,从众多可能方案中选择最优解。例如,自动驾驶系统在毫秒内决定是加速、刹车还是转向。

行动与优化(“手脚”与“进化”):系统将决策转化为实际行动,作用于物理世界或其他系统(如控制机器人手臂、发送推荐通知)。同时,它会根据行动结果产生的反馈数据不断进行自我学习和调整,让下一次决策更聪明,实现持续优化。

一个生动的例子就是“智慧城市交通大脑”:

它感知(汇集所有路口摄像头、地磁线圈、GPS的实时车流数据) → 分析(利用AI模型预测拥堵趋势) → 决策(智能调整红绿灯的配时方案) → 行动(信号灯变化,疏导交通)。整个过程形成一个闭环,系统在不断反馈中越调越优。

➤ 智能系统

如果说“大数据”是原材料,那么“**智能系统**”就是利用这些材料进行感知、分析、决策并自主行动的“超级大脑”。

它是一个高度融合的跨学科领域,其**核心思想**是:将人工智能(AI)的算法模型,嵌入到复杂的现实“系统”中,通过感知环境、持续学习并动态调整,最终实现系统整体目标的优化。

你可以从三个层面理解它:

感知与认知(“五官”与“大脑”):系统能通过传感器、数据接口等“感官”(物联网技术),实时采集海量环境数据(即大数据)。然后利用机器学习、知识图谱等AI技术“理解”和分析这些信息。

决策与规划(“思考”):这是智能的核心。系统基于当前状态和历史数据,通过算法模型进行计算、推理和预测,从众多可能方案中选择最优解。例如,自动驾驶系统在毫秒内决定是加速、刹车还是转向。

行动与优化(“手脚”与“进化”):系统将决策转化为实际行动,作用于物理世界或其他系统(如控制机器人手臂、发送推荐通知)。同时,它会根据行动结果产生的反馈数据不断进行自我学习和调整,让下一次决策更聪明,实现持续优化。

总而言之,智能系统是AI赋能传统系统的产物,旨在解决那些高度复杂、动态变化的问题,让系统像生物体一样具备“智能”。

—— DeepSeek

➤ 大数据与智能系统的数学基础

学习“大数据”与“智能系统”**本质**上是在学习如何用数学和计算语言来理解和塑造世界。
所需的**数学基础**可以概括为以下**四大支柱**:

1. **线性代数**(核心中的核心)

为什么? 因为数据在高维空间中通常被表示为向量, 数据集被表示为矩阵. 几乎所有的大数据和AI操作都基于此.

怎么用? 数据降维(PCA)、推荐系统(矩阵分解)、神经网络(层层矩阵运算)、图像处理(像素矩阵)等, 本质都是线性代数操作.

2. **概率与统计**(思维的基石)

为什么? 大数据充满不确定性, 智能系统的决策依赖于从不确定性中找出规律.

怎么用?

概率论: 用于建模不确定性(如贝叶斯分类器、隐马尔可夫模型).

统计学: 用于从数据中推断总体特征、验证假设、分析变量关系(回归分析、显著性检验), 这是数据分析和挖掘的根本.

—— DeepSeek

➤ 大数据与智能系统的数学基础

学习“大数据”与“智能系统”**本质**上是在学习如何用数学和计算语言来理解和塑造世界。
所需的**数学基础**可以概括为以下**四大支柱**：

1. **线性代数**(核心中的核心)

2. **概率与统计**(思维的基石)

3. **微积分**(优化的引擎)

为什么？智能系统的核心是“学习”，而学习的本质是一个优化问题——通过调整模型参数，找到最小化误差或最大化收益的目标函数。

怎么用？梯度下降等优化算法的核心就是求偏导数(多元微积分)，它指导模型如何一步步“下降”到最优解。

4. **离散数学与最优化**(逻辑与决策的框架)

为什么？计算机科学的基础，处理离散而非连续的数据结构。

怎么用？

图论：完美建模社交网络、知识图谱、推荐关系等复杂网络。

优化理论：为规划、调度、决策提供形式化的数学工具(如线性规划、动态规划)。

—— DeepSeek

➤ 大数据与智能系统的数学基础

学习“大数据”与“智能系统”**本质**上是在学习如何用数学和计算语言来理解和塑造世界。
所需的**数学基础**可以概括为以下**四大支柱**：

1. **线性代数**(核心中的核心)
2. **概率与统计**(思维的基石)
3. **微积分**(优化的引擎)
4. **离散数学与最优化**(逻辑与决策的框架)

总结一下：

线性代数为你提供描述数据的语言。

概率统计为你提供分析和推断数据的思维。

微积分为你提供优化和学习模型的工具。

离散数学为你提供建模复杂系统关系的框架。

作为理科生，你们有很大优势。扎实掌握这“四大支柱”，你就能真正理解算法背后的原理，而不仅仅是调包侠，未来在数据和智能的领域里会走得更高更远。

—— DeepSeek

谢谢大家!